

ძვირფასო სტუდენტებო,
 დავალების შესრულების დაწყებამდე,
 გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

დავალება № 13 ფუნქციის წარმოებული. გაწარმოების წესები

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 13-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

2	4	5- ა	5- ბ,გ	6- ბ	6- ა,გ	7- ა	7- ბ	8- ბ,ი	8- ე,ვ,თ	10- ბ	10- გ,დ
11- ა,გ	11- ბ,დ,ე	12- ა,ბ,ე	12- ბ,დ	13- ა,გ	13- ბ,დ	14- ა,დ	14- ბ,გ,ე	15- ა	15- ბ,დ	17	18
19	20-										

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

4. გამოთვალეთ $f(x) = x^7$ ფუნქციის გრაფიკის დახრა $x = 2$ წერტილში.

ამოხსნა

$$m = f'(2); f'(x) = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6; m = f'(2) = 7 \cdot 2^6 = 7 \cdot 64 = 448.$$

პასუხი

ფუნქციის გრაფიკის დახრა $x = 2$ წერტილში არის 448.

5-ა. გააწარმოეთ $y = x^8$ ფუნქცია.

ამოხსნა

$$y' = (x^8)' = 8x^{8-1} = 8x^7.$$

პასუხი

$$y' = 8x^7.$$

6-ბ. გააწარმოეთ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ფუნქცია და პასუხი ჩაწერეთ რადიკალების გამოყენებით.

ამოხსნა

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = (x^{-1/4})' = -\frac{1}{4}x^{-1/4-1} = -\frac{1}{4}x^{-5/4} = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

პასუხი

$$y' = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

7-ა. იპოვეთ იმ წერტილის კოორდინატები, რომელშიც $y = x^5$ წირს გააჩნია 405-ის ტოლი გრადიენტი.

ამოხსნა

$$m = 405 = f'(c); f'(x) = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4; 5 \cdot c^4 = 405; c^4 = 81; c = \pm 3;$$

$$f(\pm 3) = (\pm 3)^5 = \pm 243; (c; f(c)) = (\pm 3; \pm 243).$$

პასუხი

საძიებელი წერტილია $(\pm 3; \pm 243)$.

8-ბ. ი. გააწარმოეთ ფუნქციები: ბ) $y = \frac{4}{x}$; ო) $y = ax^2 + bx + c$.

ამოხსნა

$$\text{ბ) } y' = \left(\frac{4}{x}\right)' = (4x^{-1})' = 4(x^{-1})' = 4 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2};$$

$$\text{ო) } y' = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = a(x^2)' + b(x)' + 0 = a \cdot 2x^{2-1} + b \cdot 1x^{1-1} = 2ax + b.$$

პასუხი

$$\text{ბ) } y' = -\frac{4}{x^2}; \text{ ო) } y' = 2ax + b.$$

10-ბ. მთლიანი ამონაგების ფუნქციისათვის $TR = 50Q - 3Q^2$ იპოვეთ $\frac{d(TR)}{dQ}$.

ამოხსნა

$$\frac{d(TR)}{dQ} = (TR)' = (50Q - 3Q^2)' = (50Q)' - (3Q^2)' = 50 - 3 \cdot 2Q^{2-1} = 50 - 6Q.$$

პასუხი

$$\frac{d(TR)}{dQ} = 50 - 6Q.$$

11-ა, გ. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ $\frac{dy}{dx}$ წარმოებული და გამარტივებულ მიღებული პასუხი: ა) $y = u^2 + 1$; $u = 3x - 2$; გ) $y = \sqrt{u}$; $u = x^2 + 2x - 3$.

ამოხსნა

$$\text{ა) } \frac{dy}{du} = (u^2 + 1)' = (u^2)' + (1)' = 2u + 0 = 2u; \frac{du}{dx} = (3x - 2)' = (3x)' - (2)' = 3(x)' - 0 = 3;$$

$$\text{ი. ო. } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 3 = 6(3x - 2).$$

$$\text{გ) } \frac{dy}{du} = (\sqrt{u})' = (u^{1/2})' = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}; \frac{du}{dx} = (x^2 + 2x - 3)' = (x^2)' + (2x)' - (3)' = 2x + 2;$$

$$\text{ი. ო. } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x + 2) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

პასუხი

$$\text{ა) } \frac{dy}{dx} = 6(3x - 2); \text{ გ) } \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

12-ა, გ, ე. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები:

$$\text{ა) } y = (2x + 1)^{11}; \text{ გ) } y = \frac{1}{8x-5}; \text{ ე) } y = \sqrt{7x-3}.$$

ამოხსნა

$$\text{ა) } y' = ((2x + 1)^{11})' = 11(2x + 1)^{10} \cdot (2x + 1)' = 11(2x + 1)^{10} \cdot 2 = 22(2x + 1)^{10};$$

$$\text{გ) } y' = \left(\frac{1}{8x-5}\right)' = ((8x - 5)^{-1})' = -1 \cdot (8x - 5)^{-2} \cdot (8x - 5)' = -1 \cdot (8x - 5)^{-2} \cdot 8 = \frac{-8}{(8x-5)^2};$$

$$\text{ე) } y' = (\sqrt{7x-3})' = ((7x - 3)^{1/2})' = \frac{1}{2} \cdot (7x - 3)^{-1/2} \cdot (7x - 3)' = \frac{1}{2} \cdot (7x - 3)^{-1/2} \cdot 7 = \frac{7}{2\sqrt{7x-3}}.$$

პასუხი

$$\text{ა) } y' = 22(2x + 1)^{10}; \text{ გ) } y' = \frac{-8}{(8x-5)^2}; \text{ ე) } y' = \frac{7}{2\sqrt{7x-3}}.$$

13-ა, გ. ნამრავლის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები:

ა) $y = x^2(x+3)^5$; გ) $y = x^4 \cdot \sqrt{x+1}$.

ამოხსნა

ა) $y' = (x^2(x+3)^5)' = (x^2)' \cdot (x+3)^5 + x^2 \cdot ((x+3)^5)' = 2x \cdot (x+3)^5 + x^2 \cdot 5(x+3)^4 \cdot (x+3)'$
 $y' = 2x(x+3)^5 + 5x^2(x+3)^4 = (x+3)^4(2x^2 + 6x + 5x^2) = (x+3)^4(7x^2 + 6x)$.

გ) $y' = (x^4 \cdot \sqrt{x+1})' = (x^4)' \cdot \sqrt{x+1} + x^4 \cdot (\sqrt{x+1})' = 4x^3 \cdot \sqrt{x+1} + x^4 \cdot ((x+1)^{\frac{1}{2}})'$;

$y' = 4x^3 \cdot \sqrt{x+1} + x^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x+1)' = 4x^3 \cdot \sqrt{x+1} + x^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$;

$y' = 4x^3 \cdot \sqrt{x+1} + \frac{x^4}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x^3(8x+8+x)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x^3(9x+8)}{2\sqrt{x+1}}$.

პასუხი

ა) $y' = (x+3)^4(7x^2 + 6x)$; გ) $y' = \frac{x^3(9x+8)}{2\sqrt{x+1}}$.

14 -ა, დ. წილადის გაწარმოების წესის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები:

ა) $y = \frac{x^2}{x+4}$; დ) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$.

ამოხსნა

ა) $y' = \left(\frac{x^2}{x+4}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x+4) - x^2 \cdot (x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{2x \cdot (x+4) - x^2 \cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{2x^2 + 8x - x^2}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x}{(x+4)^2}$;

დ) $y' = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot (1+\cos x) - \sin x \cdot (1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot (1+\cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$;

$y' = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$.

პასუხი

ა) $y' = \frac{x^2+8x}{(x+4)^2}$; დ) $y' = \frac{1}{1+\cos x}$.

15-ა. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $y = -x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ ფუნქციას ეხება $(-1; -8)$ წერტილში.

ამოხსნა

$(-1; -8)$ წერტილზე გავლებული მხები წრფის განტოლებაა $y + 8 = m(x + 1)$, სადაც $m = y'(-1)$.

$y' = (-x^3 - 5x^2 + 3x - 1)' = -3x^2 - 10x + 3$; შესაბამისად, $y'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) + 3 = 10$; ე.ი.

$y + 8 = 10(x + 1)$; $y = 10x + 2$.

პასუხი

მხები წრფის განტოლებაა $y = 10x + 2$.

17. ქარხანაში დილის ცვლის ეფექტურობის შესწავლა მიუთითებს: თუ მუშა მუშაობას დაიწყებს დილის 8:00 საათზე, მაშინ t საათის შემდეგ ის დაამზადებს $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ რაოდენობის პროდუქტს.

ა) გამოთვალეთ მუშის შრომის ნაყოფიერება $R(t) = Q'(t)$.

ბ) რა იქნება მუშის შრომის ნაყოფიერების ცვლილების ტემპი დილის 9 საათისთვის?

ამოხსნა

ა) $R(t) = Q'(t) = (-t^3 + 8t^2 + 15t)' = -3t^2 + 16t + 15$;

ბ) რადგან მუშა მუშაობას იწყებს 8:00 საათზე, ამიტომ დილის 9 საათისთვის $t = 1$.

$R'(t) = (-3t^2 + 16t + 15)' = -6t + 16$; შესაბამისად, $R'(1) = -6 \cdot 1 + 16 = 10$.

პასუხი

ა) $R(t) = -3t^2 + 16t + 15$; ბ) შრომის ნაყოფიერების ცვლილების ტემპი იზრდება 10 ერთეულით.

19. პროგნოზირდება, რომ x თვის შემდეგ გარკვეული ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა იქნება

$$P(x) = 2x + 4x^{3/2} + 5\,000.$$

ა) რა ტემპით შეიცვლება მოსახლეობა 9 თვის შემდეგ?

ბ) რამდენი იქნება მოსახლეობის პროცენტული ცვლილების ტემპი 9 თვის შემდეგ?

ამოხსნა

$$ა) P'(x) = (2x + 4x^{3/2} + 5\,000)' = 2 + 6x^{1/2}; P'(9) = 2 + 6 \cdot \sqrt{9} = 20;$$

$$ბ) \frac{P'(9)}{P(9)} \cdot 100 = \frac{20}{2 \cdot 9 + 4 \cdot \sqrt{9^3} + 5\,000} \cdot 100 = \frac{20}{5126} \cdot 100 \approx 0,39\%.$$

პასუხი

ა) გაიზრდება 20 ერთეულით.

ბ) პროცენტული ცვლილების ტემპია 0,39% .